

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 16.02.2019
Clasa a IX-a

1. (7p) Arătați că, pentru orice n număr natural nenul, numărul $2^{2n-1} - (-2)^{n-1} - 1$ se divide cu 9.
2. (7p) Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n \geq 1}$ și progresia geometrică $(b_n)_{n \geq 1}$, formate din numere reale pozitive. Dacă $a_1 = b_1$ și $a_2 = b_2$, demonstrați că $a_n \leq b_n$, pentru orice n număr natural nenul.
3. (7p) Determinați numerele naturale a și b , cu proprietatea $\left[\frac{a+b}{2} \right] = \sqrt{ab}$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x .
4. Se notează cu O_1 și O_2 mijloacele diagonalelor $[AC]$, respectiv $[BD]$ ale patrulaterului $ABCD$.
- a) (4p) Arătați că $\overrightarrow{O_1O_2} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC})$.
- b) (3p) Dacă $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = 3\overrightarrow{O_1O_2}$, demonstrați că $ABCD$ este paralelogram.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp efectiv de lucru: 3 ore.